一个新的 Hilbert 不等式及其等价形式*

赵玉中，郭继峰
（青岛理工大学 理学院，山东 青岛 266033）

摘　要：引入单参数 λ，β 函数及 Taylor 级数，建立了一个新 Hardy-Hilbert 积分不等式，给出两种不同的最佳推广，并证明其常数因子为最佳值。作为应用，考虑了相应的等价形式。

关键词：Hilbert 不等式；β 函数；Taylor 级数
中图分类号：O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2010）04－0016－05

A New Hilbert's Type Integral Inequality and the Equivalent Forms

ZHAO Yuzhong, GUO Jifeng
（School of Science, Qingdao Technological University, Qingdao 266033, China）

Abstract: A new Hilbert integral inequality with a best constant factor is established by introducing a parameter λ, β function and Taylor series. Two best extensions of it and the equivalent forms are given.

Key words: Hilbert inequality; β function; Taylor series

设 $p>1, 1/p+1/q=1, f(x), g(x)\geqslant 0, 0<\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x<\infty, 0<\int_0^\infty g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有如下著名的 Hardy-Hilbert 积分不等式及等价形式[1]。

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q} \quad (1)$$

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y < \left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^p\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x \quad (2)$$

这里，常数因子 $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}$ 与 $\left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^p$ 都是最佳值。它们在分析学中有重要的应用[2]。

在与（1）式相同的条件下，还有如下经典的 Hardy-Hilbert 型积分不等式及其等价形式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\ln(x/y)f(x)g(y)}{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^2\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q} \quad (3)$$

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{\ln(x/y)}{x+y}f(x)\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y < \left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^{2p}\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x \quad (4)$$

这里，常数因子 $\left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^2$ 与 $\left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^{2p}$ 都是最佳值。

近年，文献［3－10］作了各种不同形式的推广，其中文献［9］通过估算权函数及引入 β 函数，建立了如下含参数 λ 的 Hilbert 不等式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{|x-y|^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 2B\left(\frac{1}{2}-\lambda,\lambda\right)\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/2} \quad (5)$$

这里，常数因子 $2B\left(\frac{1}{2}-\lambda,\lambda\right)\left(0<\lambda<\frac{1}{2}\right)$ 为最佳值。

本文的主要目的是在已有文献的基础上，通过引进 Taylor 级数，建立如下 Hilbert 积分不等式

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < B\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q} \quad (6)$$

* 收稿日期：2009－05－20
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60674020）
作者简介：赵玉中（1984 年生），男，硕士生；E-mail：zyzldq520@163.com

这里，常数因子 $B = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\cdot$ $\left[\frac{1}{(n-\lambda+1/p)^2}+\frac{1}{(n-\lambda+1/q)^2}\right]$ 是最佳值，同时给出（6）式等价形式。

1　一些引理

本文将用到如下标记

$$\binom{a}{n}=\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!},\binom{a}{0}=1,$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

引理 1　设 $0<\lambda<\min\{1/p.1/q\}$，$1/p+1/q=1(p>1)$。定义函数 $w_1(x)$，$w_2(x)$

$$w_1(x)=\int_0^{\infty}\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/q}dy \quad (7)$$

$$w_2(x)=\int_0^{\infty}\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/p}dx \quad (8)$$

则有等式

$$w_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\cdot\left[\frac{1}{(n-\lambda+1/p)^2}+\frac{1}{(n-\lambda+1/q)^2}\right]=w_2(\lambda) \quad (9)$$

证明　令 $y=ux$，则由（7）式可得

$$I_1=\int_0^{x}\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/q}dy=$$
$$\int_0^1\frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}\min\{1,u^{\lambda}\}}(u)^{-\frac{1}{q}}du=$$
$$\int_0^1\frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}u^{-\lambda-1/q}du=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\int_0^1(-\ln u)u^{n-\lambda-1/q}du=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\frac{1}{(n-\lambda+1/p)^2}$$

作变换 $x=uy$，则由（7）式同样可得

$$I_2=\int_x^{\infty}\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/q}dy=$$
$$\int_0^1\frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}\min\{1,u^{\lambda}\}}(u)^{1-\lambda+1/q-2}du=$$
$$\int_0^1\frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}u^{-\lambda-1/p}du=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\int_0^1(-\ln u)u^{n-\lambda-1/p}du=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\frac{1}{(n-\lambda+1/q)^2}$$

由 I_1，I_2 可得（8）式，采用同样的方法可得（9）式。证毕。

引理 2　设 $0<\lambda<\min\{1/p,1/q\}(p>1)$，定义函数 $w_{\lambda}(x)$，$w_{\lambda}(y)$

$$w_{\lambda}(x)=\int_0^{\infty}\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\frac{x^{p/q^2}}{y^{1/p}}dy \quad (10)$$

$$w_{\lambda}(y)=\int_0^{\infty}\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\frac{y^{q/p^2}}{x^{1/q}}dx \quad (11)$$

则有等式

$$w_{\lambda}(x)=x^{p-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\cdot\left[\frac{1}{(n-\lambda+1/p)^2}+\frac{1}{(n-\lambda+1/q)^2}\right] \quad (12)$$

$$w_{\lambda}(y)=y^{q-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\cdot\left[\frac{1}{(n-\lambda+1/p)^2}+\frac{1}{(n-\lambda+1/q)^2}\right] \quad (13)$$

证明　令 $y=ux$，则由（10）式可得

$$I_1=\int_0^{x}\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\frac{x^{p/q^2}}{y^{1/p}}dy=$$
$$x^{p-2}\int_0^1\frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}\min\{1,u^{\lambda}\}}u^{-\frac{1}{p}}du=$$
$$x^{p-2}\int_0^1\frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}u^{-\lambda-1/p}du=x^{p-2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-\lambda}{n}\cdot$$
$$\int_0^1(-\ln u)u^{n-\lambda-1/p}du=x^{p-2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-\lambda}{n}\frac{1}{(n-\lambda+1/p)^2}$$

做变换 $x=uy$，则由（10）式同样可得

$$I_2=\int_x^{\infty}\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}\frac{x^{p/q^2}}{y^{1/p}}dy=$$
$$x^{p-2}\int_0^1\frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}\min\{1,u^{\lambda}\}}u^{1-\lambda+1/p-2}du=$$
$$x^{p-2}\int_0^1\frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}u^{-\lambda-1/q}du=x^{p-2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-\lambda}{n}\cdot$$
$$\int_0^1(-\ln u)u^{n-\lambda-1/q}du=x^{p-2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n-\lambda}{n}\frac{1}{(n-\lambda+1/q)^2}$$

由 I_1，I_2 可得（12）式，采用同样的方法可得（13）式。证毕。

引理 3　设 $0<\varepsilon<q-q\lambda-1$，$q>1$，$0<\lambda<\min\{1/p,1/q\}$ 则有

$$\int_1^{\infty}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\frac{\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{q}+\frac{\varepsilon}{q}+\lambda}du=o(1),$$
$$\varepsilon\to 0_+$$

证明　由题设可得

$$0>\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{\varepsilon}{q}+\frac{1}{q}+\lambda}dudx>$$
$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{\varepsilon}{q}+\frac{1}{q}+\lambda}\ln u\,du\,dx=\frac{pq}{pq\lambda+p\varepsilon-q}\cdot$$
$$\int_1^{\infty}x^{\frac{pq\lambda+p\varepsilon-q}{pq}-1}\ln x\,dx-\left(\frac{pq}{pq\lambda+p\varepsilon-q}\right)^2\int_1^{\infty}x^{\frac{p\varepsilon-q}{pq}-1}dx=$$

$$2\left(\frac{pq}{pq\lambda+p\varepsilon-q}\right)^3$$

证毕。

引理4 设 $0<\varepsilon<1-q\lambda, q>1, 0<\lambda<\min\{1/p,1/q\}$ 则有

$$\int_1^\infty\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\frac{\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{\varepsilon}{q}+\lambda}\mathrm{d}u=o(1),\quad \varepsilon\to 0_+$$

证明 由题设可得

$$0>\int_1^\infty\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{\varepsilon}{q}+\frac{1}{p}+\lambda}\mathrm{d}u\mathrm{d}x>$$

$$\int_1^\infty\frac{1}{x}\int_0^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{\varepsilon}{q}+\frac{1}{p}+\lambda}\ln u\mathrm{d}u\mathrm{d}x=\frac{q}{q\lambda+\varepsilon-1}\cdot$$

$$\int_1^\infty x^{\frac{q\lambda+\varepsilon-1}{q}-1}\ln x\mathrm{d}x-\left(\frac{q}{1-\varepsilon-q\lambda}\right)^2\int_1^\infty x^{\frac{q\lambda+\varepsilon-1}{q}-1}\mathrm{d}x=$$

$$2\left(\frac{q}{q\lambda+\varepsilon-1}\right)^3$$

证毕。

2 主要结果

定理1 设 $p>1, 1/p+1/q=1, 0<\lambda<\min\{1/p,1/q\}$。$f,g$ 为非负函数及

$$0<\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x<\infty, 0<\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y<\infty$$

则有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$

$$B\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\tag{14}$$

这里，常数因子

$$B=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\left[\frac{1}{(n-\lambda+1/p)^2}+\frac{1}{(n-\lambda+1/q)^2}\right]$$

是最佳值。

证明 由 Hölder 不等式，有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/pq}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{1/pq}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(x/y)|f^p(x)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/q}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{1/p}\cdot\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(x/y)|g^q(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{1/q}$$

如果上式取等号，则存在常数 A,B，使得

$$A\frac{|\ln(x/y)|f^p(x)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/q}=B\frac{|\ln(x/y)|g^q(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/p}$$

即有 $Af^p(x)\ x=Bg^q(y)\ y=\text{const.}$，这与条件 $\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$ 矛盾。因而只能取严格不等号。再由引理1可得

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$

$$\left(\int_0^\infty w_1(\lambda)f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty w_2(\lambda)g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}=$$

$$B\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}$$

下证 B 是最佳值。定义两个函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}0 & x\in(0,1)\\ x^{-(1+\varepsilon)/p} & x\in[1,\infty)\end{cases}$$

$$\tilde{g}(y)=\begin{cases}0 & x\in(0,1)\\ y^{-(1+\varepsilon)/q} & x\in[1,\infty)\end{cases}$$

假设 $0<\varepsilon<q-q\lambda-1$，则

$$\int_0^\infty\tilde{f}^p(x)\mathrm{d}x=\int_1^\infty x^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}x=\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\int_0^\infty\tilde{g}^q(y)\mathrm{d}y=\int_1^\infty y^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon}$$

如果 B 不是最佳的。那么存在 $k>0$ 且 $k<B$，使得

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(x/y)|\tilde{f}(x)\tilde{g}(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$

$$k\left(\int_0^\infty\tilde{f}^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty\tilde{g}^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}=\frac{k}{\varepsilon}\tag{15}$$

另一方面，令 $y=ux$ 由引理3可得

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln(x/y)|\tilde{f}(x)\tilde{g}(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_1^\infty\int_1^\infty\frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\left(\frac{1}{x}\right)^{(1+\varepsilon)/p}\left(\frac{1}{y}\right)^{(1+\varepsilon)/q}\cdot$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^\infty\int_{\frac{1}{x}}^\infty\frac{|\ln u|}{(1+u)^{1-\lambda}\min\{1,u^\lambda\}}\left(\frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{u}\right)^{(1+\varepsilon)/q}\mathrm{d}u\mathrm{d}x=$$

$$\int_1^\infty\int_0^1\frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}u^\lambda}\left(\frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{u}\right)^{(1+\varepsilon)/q}\mathrm{d}u\mathrm{d}x+$$

$$\int_1^\infty\int_1^\infty\frac{\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}\left(\frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{u}\right)^{(1+\varepsilon)/q}\mathrm{d}u\mathrm{d}x+o(1)=$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n(n-\lambda n)\left[\frac{1}{(n-\lambda+1/p-\varepsilon/q)^2}+\frac{1}{(n-\lambda+1/q+\varepsilon/q)^2}\right]+o(1)$$

显然，当 $\varepsilon\to 0_+$ 时，上式与（15）式矛盾。

所以 B 是最佳值。

推论 1　在定理 1 的条件下，有

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y < B^p\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x \quad (16)$$

这里，常数因子 B^p 是最佳值；且（16）式与（14）式等价。

证明　1）设

$g(y)=\left(\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\right)^{p-1}$，则由（14）式，可得

$$\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < B\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}$$

由上式可得

$$0<\left[\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right]^{1-1/q} = \left[\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y\right]^{1/p} < B\left[\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}$$

2）若（16）式为真，由 Hölder 不等式可得

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \left[\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\right)^p\mathrm{d}y\right]^{1/p}\cdot\left[\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right]^{1/q} < B\left(\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q}$$

结合 1)，2) 可得推论 1 的结论。

定理 2　设 $p>1, 1/p+1/q=1, 0<\lambda<\min\{1/p,1/q\}$。$f,g$ 为非负函数及

$$0<\int_0^\infty x^{p-2}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty, 0<y^{q-2}g^q(y)\mathrm{d}y<\infty$$

则有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < B\left(\int_0^\infty x^{p-2}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty y^{q-2}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{1/q} \quad (17)$$

这里，常数因子 $B=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\cdot\left[\frac{1}{(n-\lambda+1/p)^2}+\frac{1}{(n-\lambda+1/q)^2}\right]$ 是最佳值。

证明　由 Hölder 不等式，有

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\frac{x^{1/q^2}}{y^{1/p^2}}\frac{y^{1/p^2}}{x^{1/q^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \left\{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f^p(x)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\frac{x^{p/q^2}}{y^{1/p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{1/p}\cdot\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|g^q(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\frac{y^{q/p^2}}{x^{1/q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{1/q}$$

如果上式取等号，则存在常数 A，B，使得

$$A\frac{|\ln(x/y)|f^p(x)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\frac{x^{p/q^2}}{y^{1/p}} = B\frac{|\ln(x/y)|g^q(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\frac{y^{q/p^2}}{x^{1/q}}$$

即有 $Af^p(x)x^{p-1}=Bg^q(y)y^{q-1}=\text{const.}$ 这与条件 $\int_0^\infty x^{p-2}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$ 矛盾，因而只能取严格不等号。再由引理 2 可得

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \left\{\int_0^\infty w_\lambda(x)f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\left\{\int_0^\infty w_\lambda(y)g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{1/q} = B\left(\int_0^\infty x^{p-2}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty y^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}$$

下证 B 是最佳值。定义两个函数

$$\tilde f(x)=\begin{cases}0 & x\in(0,1)\\ x^{-\frac{1}{q}-\frac{\varepsilon}{p}} & x\in[1,\infty)\end{cases}$$

$$\tilde g(y)=\begin{cases}0 & x\in(0,1)\\ y^{-\frac{1}{p}-\frac{\varepsilon}{q}} & x\in[1,\infty)\end{cases}$$

假设 $0<\varepsilon<1-q\lambda$，则

$$\int_0^\infty x^{p-2}\tilde f^p(x)\mathrm{d}x = \int_1^\infty\left(\frac{1}{x}\right)^{1+\varepsilon}\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\int_0^\infty y^{q-2}\tilde g^q(y)\mathrm{d}y = \int_1^\infty\left(\frac{1}{y}\right)^{1+\varepsilon}\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon}$$

如果 B 不是最佳，那么存在 $k>0$，且 $k<B$，使得

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|\tilde f(x)\tilde g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y < k\left(\int_0^\infty x^{p-2}\tilde f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty y^{q-2}\tilde g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{k}{\varepsilon} \quad (18)$$

另一方面，令 $y=ux$ 由引理 4 可得

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}\tilde f(x)\tilde g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}x^{-(1/q+\varepsilon/p)}y^{-(1/p+\varepsilon/q)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^\infty\int_{1/x}^\infty \frac{|\ln u|}{(1+u)^{1-\lambda}\min\{1,u^\lambda\}}x^{-1-\varepsilon}u^{-(1/p+\varepsilon/q)}\mathrm{d}u\mathrm{d}x =$$

$$\int_1^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln u|}{(1+u)^{1-\lambda}\min\{1,u^\lambda\}}x^{-1-\varepsilon}u^{-(1/p+\varepsilon/q)}\mathrm{d}u\mathrm{d}x +$$

$$\int_1^\infty\int_0^{1/x} \frac{\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}u^\lambda}x^{-1-\varepsilon}u^{-(1/p+\varepsilon/q)}\mathrm{d}u\mathrm{d}x =$$

$$\int_1^\infty\int_0^1 \frac{-\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}u^\lambda}x^{-1-\varepsilon}u^{-(1/p+\varepsilon/q)}\mathrm{d}u\mathrm{d}x +$$

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\ln u}{(1+u)^{1-\lambda}}x^{-1-\varepsilon}u^{-(1/p+\varepsilon/q)}\mathrm{d}u\mathrm{d}x + o(1) =$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\binom{n-\lambda}{n}\Big[\frac{1}{(n-\lambda+1/p-\varepsilon/q)^2}+\frac{1}{(n-\lambda+1/q+\varepsilon/q)^2}\Big]+o(1)$$

显然，当 $\varepsilon\to 0_+$ 时，上式与（18）式矛盾。所以 B 是最佳值。

推论2 在定理2的条件下，有

$$\int_0^\infty y^{p-2}\Big(\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\Big)^p\mathrm{d}y < B^p\int_0^\infty f^p(x)\,\mathrm{d}x \qquad (19)$$

这里，常数因子 B^P 是最佳值；且（19）式与（17）式等价。

证明 1）设

$$g(y) := \Big(y^{p-2}\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\Big)^{p-1},$$

则由（17）式可得

$$\int_0^\infty g^q(y)\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^\infty y^{p-2}\Big(\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\Big)^p\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y <$$

$$B\Big(\int_0^\infty x^{p-2}V(x)\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_0^\infty y^{q-2}g^q(y)\mathrm{d}y\Big)^{1/q}$$

由上式可得

$$0<\Big\{\int_0^\infty y^{q-2}g^q(y)\mathrm{d}y\Big\}^{1-1/q} =$$

$$\Big\{\int_0^\infty\Big(\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\Big)^p\mathrm{d}y\Big\}^{1/p} < B\Big(\int_0^\infty x^{p-2}f^p(x)\mathrm{d}x\Big)^{1/p}$$

2）若（19）式为真，由 Hölder 不等式可得

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|f(x)g(y)}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}y^{\frac{q-2}{q}}y^{\frac{2-q}{q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\Big\{\int_0^\infty y^{p-2}\Big(\int_0^\infty \frac{|\ln(x/y)|}{(x+y)^{1-\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}}f(x)\mathrm{d}x\Big)^p\mathrm{d}y\Big\}^{1/p}\cdot\Big\{\int_0^\infty y^{q-2}g^q(y)\mathrm{d}y\Big\}^{1/q} <$$

$$B\Big(\int_0^\infty x^{p-2}f^p(x)\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_0^\infty y^{q-2}g^q(y)\mathrm{d}y\Big)^{1/q}$$

结合1)，2）可得推论2的结论。

注 当 $p=q=2$ 时，（14）式与（17）式等价，（16）式与（19）式等价。

参考文献：

[1] HARDY G S, LITTIEWOOD J E, POLYA G. Inequalities [M]. London: Cambridge University Press, 1952.

[2] MITRINOVIC D S, PECARIC J E, FINK A M. Inequalities involving functions and their integral and derivatives [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[3] GAO M Z, HSU L C. A survey of various refinements and generalizations of Hilbert's inequalities [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2005, 25 (2): 227 -243.

[4] YANG B C. A dual Hardy-Hilbert's inequality and generalizations [J]. Advances In Mathematics, 2006, 35 (1): 102 -108.

[5] 孙保炬. 一个推广的具有最佳常数的 Hardy-Hilbert 不等式 [J]. 数学进展, 2007, 36 (1): 39 -46.

[6] YANG B C. On the norm of a self-adjoint operator and a new bilinear integral inequality [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2007, 23 (7): 1311 -1316.

[7] 杨必成. 一个推广的 Hilbert 型积分不等式及其应用 [J]. 数学杂志, 2007, 27 (3): 285 -290.

[8] 钟五一, 杨必成. 一个含多参量的逆向 Hilbert 型积分不等式及其等价形式 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24 (2): 401 -407.

[9] YANG B C. On a Hilbert's type integral inequality with a parameter [J]. Pure and Applied Mathematics, 2008, 24 (3): 489 -494.

[10] 贺乐平, 高明哲. 关于 Hardy-Hilbert 不等式的一种新改进 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24 (1): 91 -96.